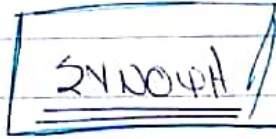


● ΑΝΑΝΤΙΚΗ ΓΕΟΜΕΤΡΙΑ : ΣΑΒΒΑΣ ΧΑΛΗΝΑΤ
 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ e-course. ΓΡΑΦΕΙΟ 403 Ε
 ΟΧΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

ΒΙΒΛΙΟ:



- 1.) Αξιομετρική Γεωμετρία (Hilbert)
- 2.) Καρτεσιανό Πεδίο ($\mathbb{R}^3$)
- 3.) Διαστάσεις και πρόβλημα (εσωτερική διάσταση, εξωτερική διάσταση ...)
- 4.) Εμβαδά - Όγκοι
- 5.) Ευθείες - Επινέδα
- 6.) Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (ισομετρίες κ.τ.λ)
- 7.) Καμπύλες και επιφανείες 2^{ου} βαθμίου
 ● στο $\mathbb{R}^3$, Σημεία

$$ax^2 + by^2 + 2\gamma xy + \delta x + \mu y + \rho = 0.$$

1.) Αξιομετρική Γεωμετρία

Η Σημασία της γεωμετρίας

- Δομικές έννοιες : (σημείο, ευθεία, επίπεδο ...)
- Συστήματα αξιωματικών (δομικές προτάσεις, new θεωρητικό πλαίσιο)

Ο Ευκλείδης στο 1^ο ~~το~~ Βιβλίο Γεωμετρίας παραδίδει.

- i) 23 ορίσματα
- ii) 5 Αιτήματα (Postulata)
- iii) 5 κοινές εννοίες.

Ορίσματα: Περιέχουν έννοιες όπως σημείο, γραμμή, ευθεία κλπ. Υπάρχει ένα θεώρημα που ορίζεται παραδοχολογικά, δεν ορίζεται ισότιμα κτλ.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ

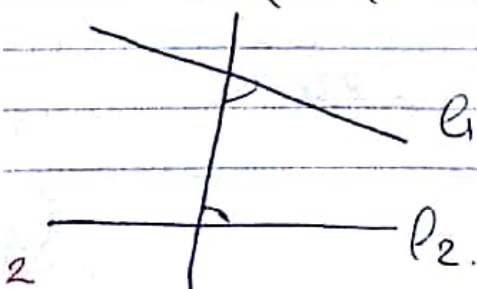
E₁) Από δύο σημεία διέρχεται ευθεία

E₂) Κάθε εγγεγραμμένο τρίγωνο προσκείμενο ευθείας και ευθύγραμμο προς τα δύο άκρα.

E₃) Με τυχόν κέντρο και ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος

E₄) Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες

E₅) Αν μία ευθεία τέμνει άλλες δύο έτσι ώστε το άθροισμα των ενός και επί τα αυτά γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται προς την πλευρά εκείνη όπου ονομά το άθροισμα είναι μικρότερο των δύο ορθών.



• Αξιώματα σύστημα κατά Hilbert

(2)

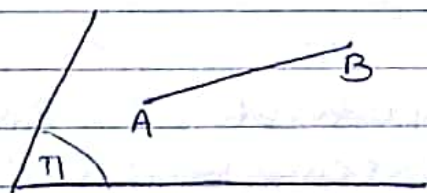
Απαιτείται να υπάρχει ένας χώρος E^3 τα στοιχεία του E^3 λέγονται σημεία $\forall$ οποιαδήποτε ενόσθια οι υπάρχουν κλίσεις υποσώθια. L και P τα $\{ \text{σημεία} \}$ των οποίων L είναι και ενόσθια αυτές τις ενόσθια θα πρέπει να υπάρχουν κλίσεις αξιώματα.

• Αξιώματα Δέσμιου

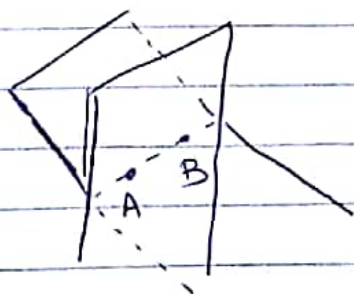
E₁) $\forall$ δύο σημεία $A, B \in E^3$ υπάρχει μοναδική ενόσθια L να τα ενώνει.

E₂) Για τρία $\{ \text{σημεία} \}$ A, B, Γ υπάρχει μοναδικό ενόσθιο Π να τα περιέχει.

E₃) $\forall$ δύο διακεκλιμένα σημεία A, B ανήκουν σε ενόσθιο Π , τότε και η ενόσθια AB να τα ενώνει ανήκει στο Π .



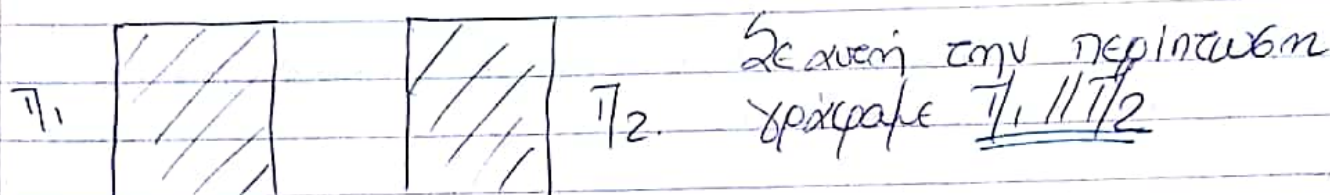
E₄) $\forall$ δύο ενόσθια Π_1 και Π_2 έχων κοινά σημεία, τότε έχων και δεύτερο κοινά σημεία.



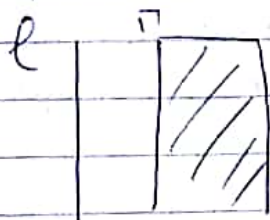
Ε5) Κάθε ερώση περιέχει ταξίδια 800 ερωτήσεων, κάθε ενότητα περιέχει ταξίδια 300 ερωτήσεων ερωτήσεων. Υπάρχουν ταξίδια 400 ερωτήσεων ερωτήσεων

Ορίσεις

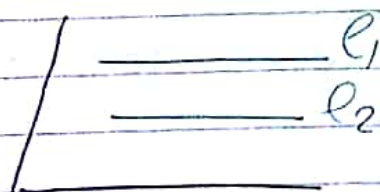
(1) Δύο ενότητες π_1 και π_2 καλούνται παράλληλες αν και μόνο αν έχουν κοινό σημείο.



(2) Για ερώση l λέγεται παράλληλη προς το ενότητα π , αν δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το π .



(3) Δύο ερωτήσεις l_1, l_2 λέγονται παράλληλες αν είναι εξωτερικές και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



(4) Δύο ευθείες λέγονται αγόμενες αν δεν υπάρχει επίπεδο που τα περιέχει.

Αγόμενα Στοιχεία

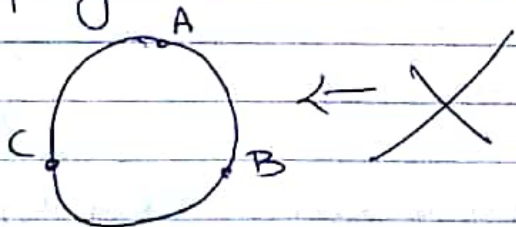
Για την διατύπωση των αγόμενων διατάξεων αναπτύσσεται να έχει οριστεί μια σχέση που σημαίνει ότι το "επίπεδο B βρίσκεται ανάμεσα από τα A, C". Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $A * B * C$. Τα αγόμενα είναι τα εξής:

1.) Αν $A * B * C$, τότε A, B, C διακεχωρισμένα και συνευθειακά.
Επίσης $C * B * A$.

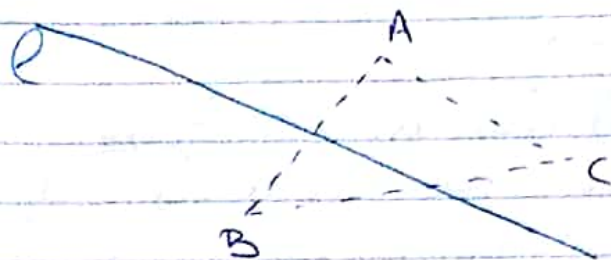
2.) Για $A, B \in E^3$ υπάρχει τολάχιστον ένα $C \in E^3$ έτσι ώστε $A * B * C$.



3.) Μετά τις πρώτες οποιοδήποτε ευθείες, το νότι είναι μετά τις άλλες δύο.



4) (Parsch). Έστω A, B, C τρία διακεκλιμένα σημεία μν ευθεία και ℓ μία ευθεία που δεν τα περιέχει. Εάν ℓ περιέχει ένα σημείο του AB , τότε περιέχει είτε ένα σημείο του BC ή ένα σημείο του AC .



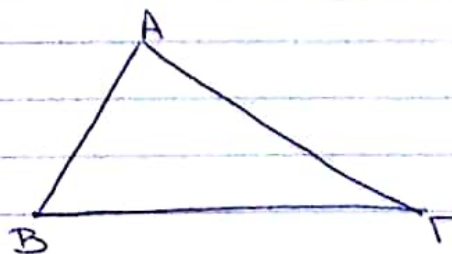
Αρα είναι παραδείγματα αλυσίδας διακεκλιμένων σημείων ενός, όπως ευθύγραμμο τμήμα, χωρία, μηκώνεδρο και μπιχουρος.

Ορισμός

Αν ℓ και B είναι διακεκλιμένα σημεία, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ℓB (ή BA) με άκρα τα ℓ και B είναι το σύνολο των σημείων που περιέχεται ανάμεσα από A και B .



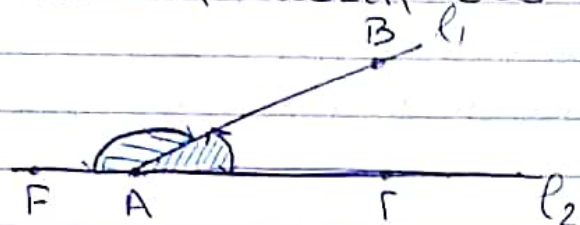
Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, B, Γ είναι η ένωση των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, B\Gamma, A\Gamma$.



με την παραδοχή ότι A, B, Γ δεν είναι ευθεία.

Ορισμός

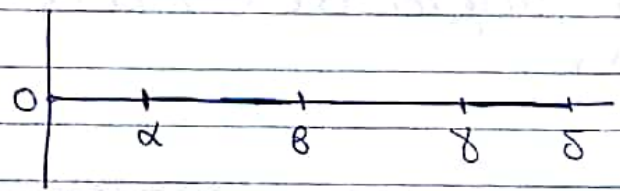
Ενός γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ με κορυφή το σημείο A είναι η ευθεία δύο ημικυκλίων $AB, A\Gamma$



Εάν F είναι σημείο έτσι ώστε $F \neq A \neq \Gamma$. Τότε οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{F}\hat{A}\hat{B}$ λέγονται παραπληρωματικές

Αξιώματα Ισοτήτας

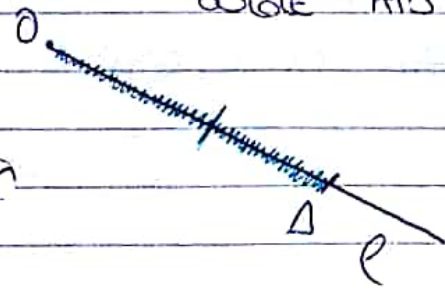
Ας υποθέτουμε ότι υπάρχει μια οξεία γωνία α και ένα ευθύγραμμο τμήμα και γωνία.



Την γωνία την αποδοίξουμε ως αμείωτη με " α ". Οι οξείες ~~κορυφές~~ γωνίες πρέπει να αντιστοιχούν τα αξιώματα:

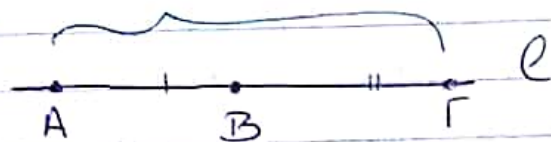
I. Γίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και μιας ημικυκλίας ℓ με άκρη το σημείο O , υπάρχει

παράλληλο σημείο Δ στη ℓ τέτοιο ώστε $AB = OA$

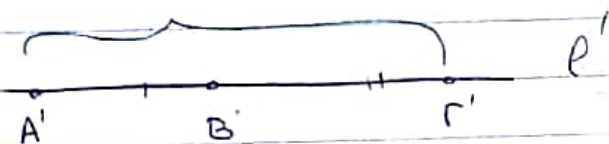


I₂) Εάν $AB = CD$ και $AB = EF$, τότε $CD = EF$. Επίσης κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με τον εαυτό του.

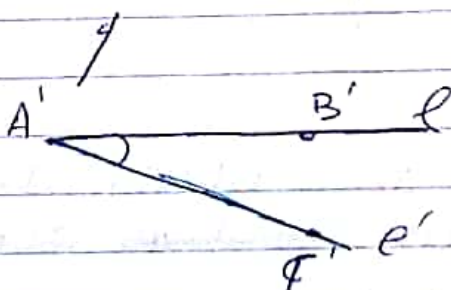
I₃) Έστω A, B, Γ σημεία επί μιας ευθείας. Π.ε
 $A * B * \Gamma$ και A', B', Γ' σημεία επί μιας άλλης ευθείας
 π.ε $A' * B' * \Gamma'$



Εάν $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma' \Rightarrow A\Gamma = A'\Gamma'$



I₄) Δοθέντες μιας γωνίας $\angle BAC$ και μιας ημιευθείας l με άκρη το A' , υπάρχει $B' \in l$ και $\Gamma' \in l'$ έτσι ώστε $\angle BAC = \angle B'A'\Gamma'$

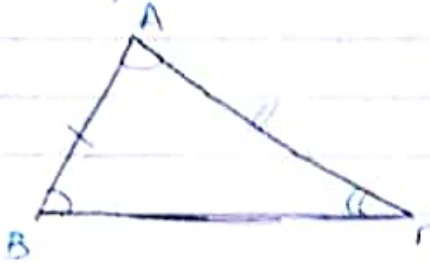


I₅) Για τρεις γωνίες α, β, γ αν

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \gamma$$

Επίσης κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της.

Ιε) Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, και $A'B'\Gamma'$ και $AB = A'B'$
 $AF = A'F'$ & $\angle BAF = \angle B'A'F' \Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$
 και $\angle B\Gamma A = \angle B'\Gamma'A'$



Ορισμός

Είνα γωνία γέλιαν ορθή αν είναι ίση με την παραπληρωματική της.



Ορισμός

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα όταν έχουν τις μέρες και τις γωνίες τους ίσες ή αλλιώς

ή ε βαση τα μερικών σφικητά μπορεί να αποδει-
 γατε:

- 1.) Όλα τα κριτήρια ισότητας τρίγωνων.

2) Μπορεί να υπάρχει σε χώρο δύο ημισφαίρια
 που να περιέχουν σε άπειρο αριθμό σημείων τους 100.

3) Μπορεί να υπάρχει σε ένα χώρο 1 σημείο, επιπλέον
 2 σημεία που να είναι E και F και να είναι $E \neq F$.



Ορισμός

Η E είναι η τομή ενός χώρου Π με ένα επίπεδο α .
 Κάθε σημείο P στο Π και είναι κεντρικό σε κάθε άκρο PA
 Π που διέρχεται από P και α .



2 σημεία είναι σημεία 1η και 2η

Θεώρημα 1

Εάν E_1 και E_2 είναι δύο επίπεδα

(1) E_1 και E_2 είναι δύο επίπεδα

(2) $E_1 \neq E_2$ αλληλοχρήσιμα

(6)

(iii) ℓ_1 και ℓ_2 είναι παράλληλες (αυτή σημαίνει ότι υπάρχουν στο ίδιο επίπεδο και $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$)

iv) ℓ_1 και ℓ_2 αυξάνονται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω π_1 και π_2 δύο επίπεδα. Τότε είτε

i) π_1 και π_2 τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας

ii) $\pi_1 \equiv \pi_2$ αλληνοκρίνεται

iii) $\pi_1 \perp \pi_2$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Έστω ευθεία ℓ και επίπεδο π . Τότε, είτε

i) $\ell \cap \pi$ είναι σημείο

ii) $\ell \subset \pi$

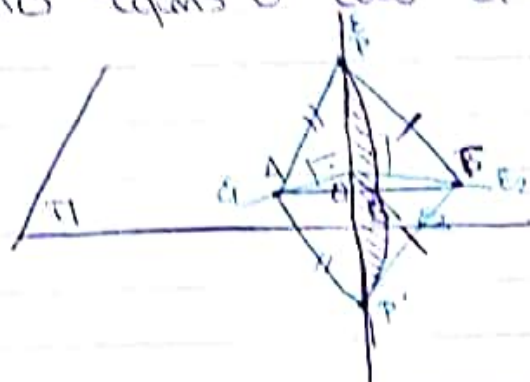
iii) $\ell \perp \pi$

Θεώρημα 1

Αν μια ευθεία ε είναι κάθετη σε δύο ~~είναι~~ ^{είναι} κάθετες
επίσης σε κάθε επίπεδο Π , τότε η ε ~~είναι~~ ^{είναι} κάθετη
στον Π .

Πρόταση 1

Έστω ε_3 τυχόν ευθεία του Π που διέρχεται από το
σημείο O των ε_1 και ε_2 .



Θεωρούμε σημεία $A \in \varepsilon_1$, $\Gamma \in \varepsilon_2$ και $B \in \varepsilon_3$, όπου B είναι
η τομή των $A\Gamma$ με την ε_3 . Θεωρούμε επίσης σημείο
 P της ε ορθόγωνα του Π έτσι ώστε $OP = OP'$.

Παράδειγμα

Τα τρίγωνα $\triangle OBP$ και $\triangle OB'P'$ είναι ισόγ. Άρα $\angle BOP$ είναι
ορθή.

Παρατήρηση : Παρατηρούμε ότι

- i) $\triangle OAP = \triangle OAP'$ αφού
- $$\begin{cases} OP = OP' \text{ από υπόθεση} \\ OA = \text{κοινή} \\ \angle AOP = \angle AOP' = 90^\circ \end{cases}$$

Συνεπώς $\boxed{AP = AP'} \quad (1)$

ii) Όμοια αποδεικνύεται ότι $\boxed{PF = P'F} \quad (2)$

iii) $\triangle PAF = \triangle P'AF$ αρα

$$\begin{cases} AP \stackrel{(1)}{=} AP' \\ PF \stackrel{(2)}{=} P'F \\ AF = \text{κοινή} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\angle PAB = \angle P'AB} \quad (3)$$

iv) $\triangle PAB = \triangle P'AB$ αρα

$$\begin{cases} \angle PAB \stackrel{(3)}{=} \angle P'AB \\ PA \stackrel{(1)}{=} P'A \\ AB = \text{κοινή} \end{cases} \Rightarrow \boxed{PB = P'B} \quad (4)$$

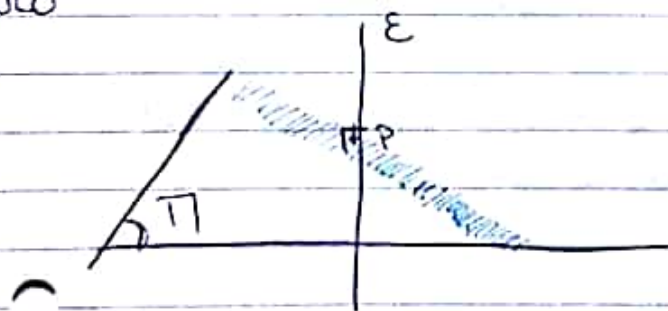
v) $\triangle OBP = \triangle OBP'$ αρα

$$\begin{cases} PB \stackrel{(4)}{=} P'B \\ OB = \text{κοινή} \\ OF = OF' \text{ από υπόθεση} \end{cases}$$

→ Άρα η $\varepsilon \perp \pi$ και από τα προηγούμενα την αποδεικνύμε.

ΠΡΟΤΗΡΙΑ

Από σημείο ελεύθερου διαγράφεται παύδι της επιμέρους ηρώνας σε αυτό

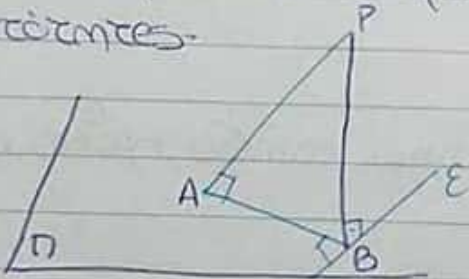


7

Από τα επίπεδα P_1 και P_2
υπάρχουν πανόμοιες ευθείες
 ℓ_1 και ℓ_2 περιέχοντα τα τέμνου
κάθετα την ε . Ως επίπεδο
είναι ℓ_1 και ℓ_2 .

Κάθετα στην ε. που διέρχεται από το ΟΕΕ. Ας συμβολίσουμε με $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ τα επίπεδα αυτά τότε ομοιοθετούμε σε αντίστροφη. (Αντιστρέφουμε ως ακριβώς).

Έστω ενined Γ , ανήκιο P ~~κα~~ ^{επί} Γ , ανήκιο $A, B \in \Gamma$ κα
είναι ε η οποία διαφέρει από το ανήκιο B ~~κα~~ ^{κα} ε Γ ~~κα~~ ^{κα}
κατακόμτες.



- i) $PA \perp l$
- ii) $AB \perp l$
- iii) $PB \perp l$

100 and over 25 and 100
and 100 and 100